EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

V—1 FEBRUARI 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF nv — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

REDACTIE.
Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel.070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;
Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

AS I WAS GOING TO ST. IVES, I MET A MAN WITH SEVEN WIVES

door

Dr. A. J. E. M. Smeur

Gouda

Bij het doorbladeren van oude rekenboekjes stuit men nogal eens op vraagstukken die, met enige variatie, eeuwen getrotseerd hebben. Er is blijkbaar steeds belangstelling voor geweest en het is interessant ze op hun weg door de historie te volgen. De Amerikaan D. E. Smith, kenner bij uitstek van oude rekenboekjes, heeft er enkele beschreven[1]), zoals het testamentprobleem, het verdelen van een som geld in een gegeven verhouding; het achtervolgingsprobleem, over een hond bijv., die een voor hem uitsnellende haas achtervolgt en op den duur inhaalt; het vat, dat door verschillende kranen, die tegelijkertijd openstaan, leegloopt; en het schaakbordprobleem, in feite het berekenen van $\sum_{1}^{64} 2^{n-1}$.

In het hierna volgende zijn enkele vraagstukken bijeengebracht van een type, dat ook nogal eens voorkomt. Voor een deel zijn ze uit 16e-eeuwse Nederlandse rekenboekjes overgenomen. Er is enige gelijkenis met het schaakbordprobleem, in zoverre het namelijk gaat om een herhaald vermenigvuldigen; soms met een constante, waardoor dus termen van een meetkundige rij ontstaan. Het aardige is nu, dat ditzelfde herhaald vermenigvuldigen ook in een oud volksraadsel te vinden is, dat in verschillende variaties en talen voorkomt. Het is voor het eerst opgetekend door J. O. Halliwell[2]):

(1) As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives,
Every wive had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits:
Kits, cats, sacks and wives,
How many were there going to St. Ives?

De aantallen vrouwen, zakken, enz. vormen een meetkundige rij met reden 7. De suggestie is natuurlijk, dat men $\sum_{1}^{4} 7^n$ gaat bereke-

nen. Maar voor de beantwoording van de vraag, die in de laatste regel gesteld wordt, hoeft er niets berekend te worden; 't is dan ook een raadsel, geen rekenopgave. Men kan zelfs nog twee kanten uit; vat men het zo op, dat die vraag op de voorlaatste regel betrekking heeft, dan luidt het antwoord: nul, maar betrekt men ze op de eerste regel, dan: één.

Dit raadsel is in Engeland nog steeds bekend en in kinderboeken te vinden. Zo vonden wij het o.a. in een – anoniem en zonder jaartal uitgegeven – „Mother Goose Nursery Rhymes" (Collins, London and Glasgow). Het staat ook opgetekend in „The Oxford dictionary of nursery rhymes"[3]), waarin nog twee soortgelijke Duitse raadsels vermeld zijn:

(2) Güng'n mann na Teterow,
dor begegneten em nägen wiwer,
jedes wief hadd'n sack up'n nacken,
in jeden sack wiren nägen katten,
jede katt hadd nägen jungen,
wöval güngen na Teterow?
Blos de mann.

(3) En Mühl hat sieve Ecke,
In jederem Eck stehne sieve Säck,
Uf jederm Säck hocke sieve Katze,
Dann komm der Müller un sie Frau
noch in die Mühl.
Wei veil Füss sin noch drim?
Vier Füss, es anner sin Dobe!

In een anoniem Vlaamstalig boekje met kinderversjes (uitg. Parijs, 1956) hebben wij onlangs nog een vertaling van (1) gelezen:

(4) Gisteren ging ik naar Terwouwen,
Ik zag een man met zeven vrouwen,
enz.

In de uitgebreide verzameling Nederlandse raadsels, door Dr. G. J. Boekenogen bijeengebracht[4]), komt een variatie van (1) voor, die nog één term meer bevat:

(5) Ik ging eens naar Sint Lijven,
Ik ontmoette zeven wijven,
Ieder wijf droeg zeven rokken,
Iedere rok had zeven zakken
In iedere zak zaten zeven katten,

En iedere kat had zeven jongen.
Hoeveel katten, zakken, rokken, wijven,
Kwamen er te Sint Lijven?

In dezelfde verzameling staat ook nog:

(6) Er liep een mannetje op de brug
Met zeven katten op zijn rug;
Iedere kat had zeven jongen,
Raad eens hoeveel beenen er over de brug gongen?

Hoe oud deze volksraadsels zijn is moeilijk na te gaan, maar vermoedelijk zijn ze al zeer oud. En dan bijna steeds met de van ouds als „heilig getal" bekende 7.

In probleem 79 van de Egyptische Rhind papyrus (18e – 16e eeuw v. Chr.) moet de som $\sum_{1}^{5} 7^n$ berekend worden. Dit wordt eerst als 7×2801 gedaan, en daarna nog eens door optelling:

(7)

huizen	7
katten	49
muizen	343
tarwe	2401
„hekat"	16807
Totaal	19607

Van de aanduidingen: huizen, katten, enz. bestaat de volgende interpretatie: er zijn 7 huizen met elk 7 katten, iedere kat vangt 7 muizen, één muis kan 7 aren tarwe eten, die elk weer 7 „hekat" ('n maat) graan voortbrengen; bereken de som van de aantallen huizen, katten, enz.[5])

Er wordt dan weer de totaalsom berekend, juist zoals de vraag in (1) bij eerste indruk schijnt te suggereren.

In deze interpretatie is de gelijkenis met (1) opvallend. A. B. Chase en D. E. Smith wijzen daar beiden op en ze vermelden, dat er in het „Liber Abbaci" (1202) van Leonardus Fibonacci – Leonardus van Pisa – een soortgelijk vraagstuk te vinden is. Wij hebben dit nagezocht en het bedoelde vraagstuk gevonden in de paragraaf „Incipit pars 9a de duplicatione scacherii, er quorundam aliarum regularum"[6]), waarin voorbeelden staan over herhaald met 2 vermenigvuldigen – de schaakbord verdubbeling, duplicatio scacherii – met 7, en met 10^n:

(8) Septem uetule uadunt romam: quarum quelibet habet burdones 7; et in quolibet burdone sunt saculi 7; et in quolibet saculo panes 7; et quilibet panis habet cultellos 7; et quilibet cultellus habet uaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.

(Zeven oude vrouwen gaan naar Rome; ieder van hen heeft 7 muilezels; iedere muilezel draagt 7 zakken; in iedere zak zijn 7 broden; bij ieder brood zijn 7 messen; ieder mes heeft 7 scheden. De som van alle genoemde wordt gevraagd.)

Door herhaald met 7 te vermenigvuldigen worden de verschillende aantallen gevonden, en deze bijeengeteld: „erunt in summa 137256, ut in descriptione ostenditur" (zullen in totaal 137256 zijn, zoals in de beschrijving getoond wordt.) Er wordt dus weer niet volstaan met de machten van 7 te vinden, maar de gevonden getallen moeten bovendien nog bijeengeteld worden. Vermeldenswaard is, dat Leonardus van Pisa ook nog eens de uitkomst berekent uit [7]):

$$[[[\{(7+1)7+1\}\ 7+1]\ 7+1]\ 7+1]\ 7.$$

In „Algorismus proiectilum" – een boekje over het rekenen met zogenaamde rekenpenningen, ook wel leggeld of werpgeld, proiectiles genoemd – van Johannes Enclen de Cusa, verschenen te Zwolle in 1502 [8]), staat op pag. a 4v als voorbeeld bij vermenigvuldigen:

(9) sint viginti quinque mulieres antiquae in foro sedentes. quarum quaelibet unam sportam habet et in qualibet sporta septem sint antiquae gallinae. et quaelibet antiquarum septum iuvenes gallinas habet. queritur iam quot numero sint gallinae mulieribus ac sportis semotis.

(Als er op de markt 25 oude vrouwen zijn met elk een mand, en er in iedere mand 7 hennen zijn, die ieder 7 kuikens hebben, dan wordt het aantal kippen gevraagd, dus zonder vrouwen en manden mee te tellen).

Het antwoord, 1400, wordt berekend uit $25 \times 7 + 25 \times 7^2$. Het voorbeeld is niet zo sprekend als de voorgaande, maar de 7 treedt weer op en de aantallen worden weer opgeteld.

Dit optellen ontbreekt in het volgende voorbeeld, waarin echter wel steeds met 7 vermenigvuldigd wordt. Het is te vinden in het „Cijfer bouck" van Adriaan vander Gucht, Brugge 1569. Op pag. 30r leest men als voorbeeld van vermenigvuldigen [9]):

(10) Ofter 7 vrauwen waren vergaert / en elcke vrauwe hadde 7 riemen / elcke rieme 7 tasschen of bursen / elcke tassche 7 loken / ende elcke loke 7 mijten daer in / vraghe hoe veel mijten onder die 7 vrauwen in als wesen zoude? Om dit te weten ende dierghelijcke / zoo doet inder manieren als hier naer volght: te weten / Multipliceret al met melcanderen: zo ghij hier ziet.

7	vrauwen
7	riemen
49	
7	tasschen
343	
7	loken
2401	
7	mijten
Dus veel 16807	mijten in als.

(loke: opening, gat; hier blijkbaar een vakje in de beurs,
in als: in alles, alles bijeen, in totaal,
mijte: 'n munt, 1 Vlaams pond = 20 schellingen = 20.12 penningen = 20.12.24 mijten).

In het „Chijfer-boeck" van Martin van den Dijcke, Antwerpen 1600, begint op pag. 278 een serie opgaven: „Hier na volghen vele diuersche subtijle lustige / recreatiue Questien / dienende om het verstant te vermaken en te scherpen." Daarbij is een opgave (nr. 71, pag. 308, 309) waarin de bewuste 7 niet gegeven is, maar juist berekend moet worden:

(11) Het waren sommighe Borghers elck had soo veel wijgaerden als der borgers waren elcken wijgaert had soo veel stocken als der Borghers waren, elcken stock had soo veel rancken als der Borghers waren, elcken ranck had soo veel druyuen & c. elcken druyf gaf soo veel potten wijns als der Borghers waren, werden in summa beuonden 204, voeder 1 aem 12 schreef ¼ Antwerps tot 54 gu. 't voyer altemael 24 schreef voor 1 aem ende 6 aem voor 1 voeder gherekent hoeveel waren der Borghers, facit 7, hoeveel wijgaerden, facit 49, hoe veel wijnstocken fac. 343. hoe veel rancken, fac. 2401: hoe veel druyuen, facit 16807, hoe veel potten wijns fa. 117649, ende om hoe veel ghelts? facit om 11029 guld. 11 stuyuers 7 neghemannekens.

De interpunctie is wat verwarrend. Als we eerst nog weten, dat 1 schreef 4 potten is, kunnen we verder uit het vraagstuk lezen:

1 voeder = 6 aem = 6.24 schreef = 6.24.4 (=576) potten. In totaal zijn er 204 voeder, 1 aem, 12¼ schreef, dus 117649 ($=7^6$) potten wijn. Hiermee is de 7 gevonden. Weten we nog: 1 gulden = 20 stuivers = 20.8 neghemannekens, dan is de prijs ook na te rekenen.

Dit zijn opgaven waarin herhaald met 7 vermenigvuldigd wordt. Daarnaast zijn er nog soortgelijke waarin andere getallen voorkomen. Zo geeft de reeds eerder genoemde Leonardus van Pisa aan, hoe men de som van een aantal termen 10^n, 10^{2n}, 10^{3n}, ... vinden kan, aan de hand van het volgende voorbeeld:

(12) Est arbor, que habet ramos 100, et in quolibet ramo sunt nidi 100; et in quolibet nido sunt oua 100; et in quolibet ouo sunt aues 100. Summam enim rerum potes inuenire per suprascriptas regulas uetularum; sed qualiter aliter fieri debeat, hic ostendamus:

(Er is een boom met 100 takken; op iedere tak zijn 100 nesten, in ieder nest 100 eieren en in ieder ei 100 vogels. De som van al deze kunt ge vinden met de voorgaande regels, in het vraagstuk van de oude vrouwen; maar wij willen hier laten zien, hoe het op een andere wijze kan.)

Leonardus begint met het aantal takken, 100, neer te schrijven. Voor de nesten, eieren en vogels zet hij er telkens 2 nullen achter, vervangt vervolgens de 2e, 4e en 6e nul door een 1 en krijgt de som 101010100.

Op overeenkomstige wijze is ook te handelen wanneer er in plaats van 100 andere machten van 10 staan, en hoewel de hogere machten van 10 voor het gegeven voorbeeld natuurlijk misplaatst zijn (100 was dat al) vervolgt Leonardus toch:

> Nam si suprascriptas species ramorum, scilicet et nidorum, ouorum et auium per mille numerum accrescerent, poneres in primo ramos 1000, ante que poneres tria zephira pro nidis, . . .

(Want als de bovengenoemde dingen, de takken, nesten, eieren en vogels, duizendvoudig oplopen, schrijf dan eerst 1000 voor de takken, daarachter 3 nullen voor de nesten[10]), . . .)

Na de berekening besluit hij met:

> et sic intelligas, si species suprascripta ascenderent per decem mille, uel per centum mille, uel per quemlibet alium numerum unitatem habentem in ultimo gradu, et zephira in reliquis.

(nu weet gij het ook, als de genoemde dingen aangroeien met 10000, 100000, of enig ander getal, dat met 1 begint en daarna nullen heeft.)

Een variatie wordt verkregen als met verschillende getallen vermenigvuldigd wordt. In het volgende voorbeeld, weer uit het „Chijfer-boeck" van Martin van den Dijcke (pag. 26), is er in die getallen nog regelmaat:

> (13) Item 8 hoender Vrouwen, die hebben 9 Rennen, ende in elcke Renne 10 Hanen, ende tot elcken Hane 11 hinnen, ende elcke hinne 12 kieckskens, nv is die vraghe? hoe veel pooten datter sijn, facit 207360 pooten.

Deze regelmaat ontbreekt bij de volgende drie voorbeelden. Uit het „Chijfer-boeck" van Martin van den Dijcke (pag. 26):

> (14) Item een man heeft een huys, in welcken huys sijn 9 camers, in elcke camer staan 5 cantoiren, ende in elcke cantoir sijn 12 laeykens, en in elck laeyken liggen 25 dubbel Ducaten, die vraghe is, hoe veel dubbel Ducaten dese man hadde, facit 13500 dubbel Ducaten.

Uit „T'Fondament Van Arithmetica", van Martin Wenceslaus, Middelburg 1599, op pag. 11:

> (15) Item een huys heeft 342 vensteren. / bij elcke venster staen 12 vrauwen / elcke vrauwe heeft 15. kinders / ende elck kindt heeft £12345. Hoe veel ponden is dat t'samen?

In „History of mathematics II" (pag. 554) citeert D. E. Smith zonder bronvermelding:

> (16) Item / Wenn in einem Gasthause weren 8 Kamern / in jglicher Kamer stünden 12 Bette/ in jglichem Bette legen 3 Geste / vnd ein jglicher Gast gebe dem Hausgesinde 6ϑ trinckgelt / Wie viel thuts in einer Summa?

Zoekt men verder, dan is het aantal voorbeelden nog uit te breiden. Zo berekent Adriaan vander Gucht in zijn „Cijferbouck" (pag. 30v) hoeveel maanden, weken, dagen, uren, minuten, secunden en „Tiercen" er verlopen zijn „t'zedert dat onsen lieuen Heere 't menschelicke gheslachte verlost heeft: of binnen den tijt van 1565 Jaeren", door te vermenigvuldigen 1565·13·4·7·24·60·60·60. Het aantal maanden is natuurlijk onjuist; verder heeft een jaar hier maar

364 dagen en vander Gucht corrigeert dit nog, door voor ieder jaar 1 dag, 5 uur en 48 minuten erbij te tellen.

Tenslotte een voorbeeld uit het „Chijfer-boeck" van Martin van den Dijcke, (pag. 25 en 26), dat mogelijk bij velen nog de eigen lagere schooltijd in herinnering zal roepen:

(17) Item een bael pampiers hout 16 riemen, ende elcken riem hout 20 boecken, ende elcken boeck hout 25 blaeders? vrage hoe veel bladers houdt die bael, facit 8000 bladeren.

Aantekeningen:

[1] D. E. SMITH. On the origin of certain typical problems. The Amer. math. monthly 24, Lanc. and Chic. 1917, 64—71; idem. History of math. II, Boston and London 1953, 536—552.

[2] J. O. HALLIWELL. The nursery rhymes of England, London 1844, 76.

[3] IONA and PETER OPIE. The Oxford dictionary of nursery rhymes, Oxford 1952, 377.

[4] G. J. BOEKENOGEN. Raadsels en raadselsprookjes. Hand. en Mededeelingen van de Maatsch. der Ned. Letterk. te Leiden, over het jaar 1900—1901, Leiden 1901, 57, 58. Onlangs nog opgenomen in: J. M. Fuchs, Wie lacht daar, Amsterdam 1962, 14.

[5] A. B. CHASE. The Rhind mathematical papyrus, Oberlin 1927, 112. Ook enkele aantekeningen bij D. E. Smith, Hist. of math. II, 500, 501. M. Cantor, Vorlesungen I, Leipz. 1907, pag. 80, 81.

[6] Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, Publicato . . . da Baldassarre Boncompagni, Roma 1857, 309: de geciteerde opgaven op pag. 311, 312. M. Cantor, Vorlesungen II, Leipz. 1913, pag. 26, 27.

[7] Hier kan men de recurrente betrekking $S_n = (S_{n-1}+1) \cdot r$ in herkennen, die geldt voor meetkundige rijen met $r = a$, en die mogelijk ook al in de Rhind papyrus toegepast is; D. E. SMITH, Hist. of math. II, 500.

[8] De Nederlandse rekenboekjes hebben wij beschreven in: De zestiende-eeuwse Nederlandse rekenboeken, 's-Gravenhage 1960; dat van Johannes Enclen de Cusa ook nog in: Scientiarum Historia, Antwerpen 1962, 12 en 63.

[9] In zijn artikel over Adriaan van der Gucht in de Biogr. Nat. de Belg. dl 26, 337, wijst J. Pelseneer reeds op de overeenkomst van deze opgave met (7): „un problème analogue au problème 79 du papyrus Rhind".

[10] ante, ervoor. Wij noemen het cijfer van een getal, dat de eenheden aangeeft, het laatste; indertijd echter noemde men dit het eerste. Zo ook in het volgende citaat, waar letterlijk staat: op de laatste plaats 1 en op de overige nul.

Aanvulling.

Nadat het voorgaande reeds gezet was vond ik nog in: K. Vogel, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis, München 1954, pag. 227, een verwijzing naar drie te München bewaarde middeleeuwse handschriften; daarin komen nog vijf vraagstukken voor, waarin herhaald met 7, met 9 en met 12 vermenigvuldigd wordt.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. Bottema

Delft

LVIII. *Een verzameling deellijnen.*

De elementaire vlakke meetkunde geeft aandacht aan enige collecties driehoeken, waarvan de basis gegeven is. Is bovendien nog hetzij de tophoek, hetzij de verhouding der opstaande zijden bekend, dan bestaat de verzameling der bissectrices van de tophoek telkens uit twee waaiers. Heel wat ingewikkelder is deze verzameling als *de hoogte* van de driehoek gegeven is.

Zij A_1A_2 de gegeven basis (met lengte $2d$) en O het midden; de rechte l evenwijdig aan de basis, en op afstand h, is de meetkundige plaats van het derde hoekpunt P (fig. 1).

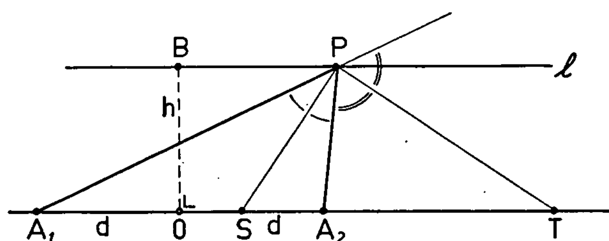


Fig. 1

B is de top van de gelijkbenige driehoek uit de collectie, $A_1B = A_2B = a$, met $a^2 = h^2 + d^2$.

De binnen- en de buitenbissectrice door P snijden de basis opvolgend in S en T.

Merkwaardig zijn al dadelijk de gedragingen van S en T als P de lijn l doorloopt. Is P in B, dan S in O. Gaat P naar rechts, dan wordt PA_1 groter dan PA_2, dus ook S gaat naar rechts. De plaats van S hangt echter af van de verhouding PA_1/PA_2, en deze nadert weer tot één, als de afstand BP onbeperkt toeneemt en dus nadert S dan weer tot O. Het snijpunt S maakt dus een *slingerbeweging* om O als P langs l gaat. De amplitude kan b.v. als volgt worden bepaald. Zij (fig. 2) M het midden van ST. De cirkel met M tot middelpunt en gaande door P, S en T is de meetkundige plaats der punten Q

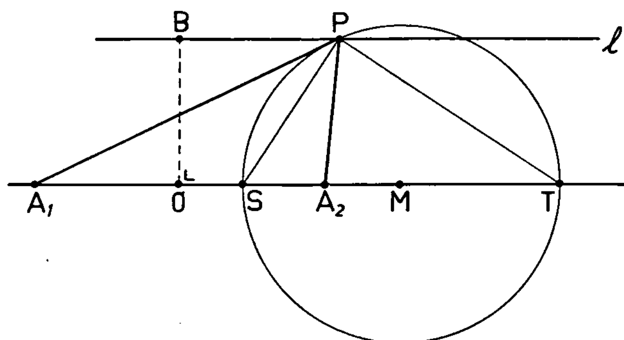


Fig. 2

waarvoor $QA_1 : QA_2$ de waarde $PA_1 : PA_2$ heeft. Voor een punt *binnen* de cirkel is deze verhouding groter en dat betekent (in onze figuur) dat er op l rechts van P punten liggen waarbij een grotere verhouding der opstaande zijden behoort. Daaruit volgt weer dat de maximale verhouding wordt verkregen in die situatie, waarbij de Apollonische cirkel aan l raakt en dus P boven M ligt. De straal van de cirkel is dan gelijk aan h. Op grond van de harmonische ligging van S en T ten opzichte van A_1 en A_2 is voorts $OA_2^2 = OS \cdot OT$ dus $d^2 = OM^2 - h^2$, waaruit volgt $OM = BP = a$. *De grootste verhouding van* $PA_1 : PA_2$ *wordt aangenomen als* $BP = BA_1 = BA_2$ *of wel als men* P *kiest in het middelpunt van een aangeschreven cirkel van de gelijkbenige driehoek* A_1A_2B. Men vindt dan onmiddellijk $OS_m = a - h$, $OT_m = a + h$ en daarmee zijn de meest rechtse stand van S, alsmede de meest linkse stand van T bepaald. (fig. 3).

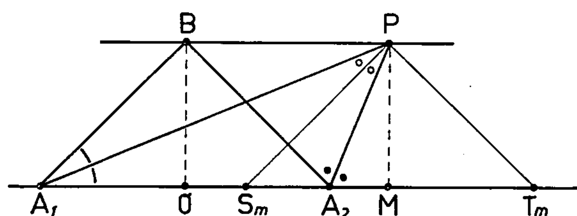


Fig. 3

De bissectrices PS en PT snijden de verlengden van BO en van OB respectievelijk in K en L. Als P tot B nadert dan nadert L ten duidelijkste tot B. Om de limietstand van K te bepalen berekenen wij OK als functie van $BP = x$. Men heeft

$$A_1S = \frac{2d \cdot PA_1}{PA_1 + PA_2}$$

en dus

$$OS = \frac{d(PA_1 - PA_2)}{PA_1 + PA_2} = \frac{4d^2x}{(PA_1 + PA_2)^2},$$

waaruit blijkt

$$\frac{OK}{BK} = \frac{OS}{x} = \frac{4d^2}{(PA_1 + PA_2)^2}.$$

Hieruit volgt dan $\lim \frac{OK}{BK} = \frac{d^2}{a^2}$ en dus $\lim OK = \frac{d^2}{h}$.

Wij hebben dus: *de limiet* (als P tot B nadert) *van het snijpunt van de binnenbissectrice met* BO *is het punt* K_1, *zodanig gelegen dat* $OK_1 = d^2/h$; K_1 is het tweede snijpunt van BO met de omgeschreven cirkel van driehoek A_1A_2B. Men kan dit ook direct meetkundig inzien door te bedenken dat PS de lijn BO altijd snijdt op de omgeschreven cirkel van de driehoek A_1A_2P en deze nadert uiteraard tot de omgeschreven cirkel van de driehoek A_1A_2B.

Na deze voorlopige beschouwingen gaan wij de verzameling bissectrices analytisch onderzoeken. Wij nemen O als oorsprong en OA_2 als X-as, het veranderlijke punt P is (t, h), waarin t een parameter is. De vergelijkingen van PA_1 en PA_2 zijn dan

$$hx - (t + d)y + hd = 0$$
$$hx - (t - d)y - hd = 0$$

en de bissectrices worden

$$f_1\{hx - (t - d)y - hd\} \pm f_2\{hx - (t + d)y + hd\} = 0 \qquad (1)$$

waarbij

$$f_1^2 = h^2 + (t + d)^2, \quad f_2^2 = h^2 + (t - d)^2 \qquad (2)$$

Wij zullen een rechte voorstellen door een vergelijking

$$ux + vy + hw = 0 \qquad (3)$$

waarbij u, v en w de coordinaten van de lijn zijn. Dan geldt voor (1)

$$h(f_1 \pm f_2) = \lambda u, \quad d(- f_1 \pm f_2) = \lambda w$$

waarin λ een evenredigheidsfactor is. Wij hebben dus

$$\lambda^2(d^2u^2 + h^2w^2) = 2h^2d^2(f_1^2 + f_2^2) = 4h^2d^2(h^2 + d^2 + t^2) \qquad (4)$$

$$\lambda^2uw = hd(- f_1^2 + f_2^2) = - 4hd^2t \qquad (5)$$

terwijl verder nog geldt, daar (3) door P gaat

$$tu + h(v + w) = 0 \qquad (6)$$

Elimineert men λ^2 en t uit (4), (5), (6), daarbij nog d/h door k voorstellend, dan komt er

$$u^2(-k^2v + w) + vw(v + w) = 0 \qquad (7)$$

Hieruit lezen wij af: *de bissectrices vormen een kromme van de derde klasse.*

Als $F(u, v, w)$ het linkerlid van (7) is, dan blijkt gemakkelijk dat de vergelijkingen $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial w} = 0$ geen oplossing hebben. De kromme heeft dus geen dubbelrechten, zij is van het geslacht één. Verder blijkt daaruit: *de bissectrices omhullen een kromme van de zesde graad.*

Een algemene kromme van de derde *graad* heeft negen buigpunten, waarvan er drie reëel zijn, deze liggen collineair. Duaal hebben wij dus: onze kromme heeft drie reële keerpunten en de keerraaklijnen gaan door één punt. Een van de keerpunten is het boven gevonden punt K_1. Aan (7) wordt voldaan door (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) en (0, 1, — 1) waaruit volgt dat tot de verzameling behoren de Y-as (die keerraaklijn is van K_1), de X-as (rakend in O) de oneigenlijke rechte (rakend in het oneigenlijke punt van de Y-as) en de lijn l (rakend in B). Voorts is de kromme tweedelig, daar de verzameling der binnenbissectrices gescheiden is (in het reële gebied) van die der buitenbissectrices. De kromme is in fig. 4 getekend. De ene tak, die de drie keerpunten bevat en op een hypocycloïde van Steiner lijkt,

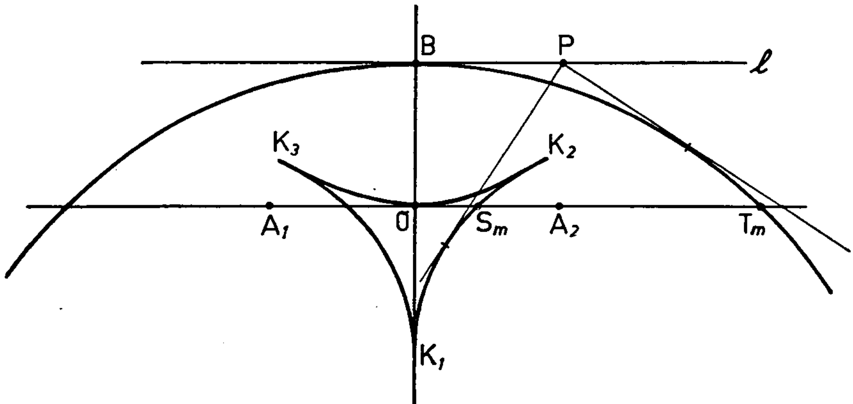


Fig. 4

is de omhullende der binnenbissectrices; zij gaat door het vroeger gevonden punt S_m; de buitenbissectrices omhullen de andere tak, die de gedaante heeft van een parabool, en door T_m gaat. De kromme verdeelt het vlak in drie gebieden. Door een punt binnen de ein-

dige tak gaan drie reële (binnen-) bissectrices; door een punt in het gebied tussen de takken gaat één reële (binnen-) bissectrice; door een punt buiten de parabolische tak gaan drie reële raaklijnen, één binnen- en twee buitenbissectrices.

Het bepalen van de keerpunten van een door haar vergelijking gegeven kromme van de derde klasse is een vraagstuk van de negende graad. In ons geval is één keerpunt, K_1, bekend en daar de kromme symmetrisch is ten opzichte van de Y-as kan het probleem tot een opgave van de vierde graad herleid worden, zodat het in beginsel oplosbaar is. De keerraaklijnen voldoen aan (7) en aan de daarbij behorende vergelijking van Hesse. Voor deze laatste vindt men

$$u^2\{k^2(k^2+2)v + (2k^2+1)w\} + (-k^2v+w)(v^2+vw+w^2) = 0 \quad (8)$$

De oplossing $v = w = 0$ wijst het keerpunt K_1 aan. Voor de overige vindt men na eliminatie van u^2 uit (7) en (8) inderdaad een vierdegraadsvergelijking voor $v : w$, nl.

$$k^4v^4 - 4k^2v^3w - 6k^2v^2w^2 - 4k^2vw^3 + w^4 = 0 \quad (9)$$

Reeds voor het geval $k = 1$ (wanneer de vergelijking wederkerig is en dus elementair kan worden opgelost) voert het resultaat tot onaantrekkelijke wortelvormen, zodat wij van een verdere behandeling afzien.

Wij merken nog op dat de verzamelingen der binnen- en der buitenbissectrices zich in het reële gebied van elkaar distanciëren, maar ondergronds verbonden zijn als de takken van een en dezelfde algebraïsche kromme. Inderdaad gaat de analytische onderscheiding in (1) die op het teken van f_1 resp. f_2 berust verloren als een dezer getallen nul wordt, wat het geval is voor $t = \pm d \pm hi$. Deze kritieke punten P zijn blijkbaar de snijpunten van l met de isotrope rechten door A_1 en A_2.

ONDERWIJSVERNIEUWING IN DENEMARKEN

In augustus 1963 is in Denemarken een nieuw wiskunde-programma voor de „B" afdeling van het gymnasium ingevoerd. Om de draagwijdte van deze vernieuwing te kunnen begrijpen, is het nuttig eerst iets over de inrichting van het Deense onderwijs te vernemen. De nodige gegevens hiervoor zijn mij door O. Rindung, lector in de wiskunde, ter beschikking gesteld.

In 1958 is in Denemarken een wet aangenomen, waarbij het onderwijs op nieuwe leest werd geschoeid. De mellemskole (tussenschool), waarvan velen wel gehoord zullen hebben, is toen verdwenen. De lagere school is zevenjarig geworden. Men kan daarna naar de realskole gaan, die drie jaar duurt. Aan het einde van het tweede jaar kan men deze realskole echter verlaten om zijn middelbare opleiding af te sluiten met drie jaar gymnasium. Een van de afdelingen van dit gymnasium is de mathematisch-fysische afdeling, welke dus vergelijkbaar is met onze B-afdelingen.

Op de lagere school wordt in het zevende leerjaar enige wiskunde gegeven aan die leerlingen, die naar de realskole denken te gaan. Voor de overigen is dit onderwijs facultatief. Het bestaat uit de algebraïsche regels voor het werken met positieve rationale getallen, eenvoudige herleidingen van vormen waarin letters voorkomen, zeer eenvoudige vergelijkingen en wat intuïtieve meetkunde.

In de eerste twee klassen van de realskole staan op het programma: negatieve getallen, vierkantswortels, vergelijkingen van de eerste graad met één, twee of drie onbekenden, tweedegraadsvergelijkingen, priemgetallen, ontbinding in factoren en deelbaarheidseigenschappen, deling van polynomen, grafieken van eenvoudige functies. En verder een normale portie planimetrie, waarbij inbegrepen de congruente transformaties van het platte vlak in zichzelf.

Ook hier is enigszins van vernieuwing sprake: voor 1958 deed men in de mellemskole niet aan grafieken en aan congruente transformaties. Bovendien vermeldt het huidige programma, dat meer dan vroeger de aandacht gevestigd moet worden op de logische betekenis van de manipulaties met vergelijkingen en op de praktische toepassingen.

Hiermee hebben we dus enig inzicht gekregen in de voorkennis van hen, die een studie aan het gymnasium beginnen.

Om de nieuwsgierigheid van sommigen te bevredigen kan ik hieraan nog toevoegen, dat in het derde jaar van de realskole, dat dus niet door de aanstaande gymnasiasten doorlopen wordt, behandeld worden: aritmetica (b.v. samengestelde intrestrekening), interpolatie, machten en wortels, logaritmen, de rekenliniaal, trigonometrie en een keuze-onderwerp, te kiezen door de leraar. Hiervoor worden aanbevolen: nomografie, lineaire programmering, functies van de tweede en derde graad, combinatoriek en waarschijnlijkheidsrekening, beschrijving van ruimtefiguren door orthogonale projectie, berekening van inhouden.

De leraar aan de realskole is niet universitair gevormd en heeft slechts een zeer beperkte wiskundige achtergrond. De leraren aan het gymnasium daarentegen zijn universitair opgeleid. Voordat het nieuwe programma ingevoerd is, zijn zij herschoold. Er zijn vier cursussen van twee weken gehouden gedurende de zomervakantie de laatste jaren. Aan deze cursussen hebben ongeveer de helft van de wiskundeleraren deelgenomen.

Hieronder volgt het nieuwe programma, dat in augustus 1963 is ingevoerd, hetgeen wil zeggen, dat volgens dit programma vanaf deze datum les gegeven is in het gymnasium, het eerste jaar uiteraard nog alleen in de eerste klasse. De tekst is de officiële uit Denemarken ontvangen tekst voorzien van het Deense commentaar.

P. G. J. Vredenduin

A. *Subject list in mathematics for the mathematics-physics branch of the Danish gymnasium*

1. *General concepts from set theory and algebra*

Set, subset, complement, union, intersection.

Equivalence relation, ordening relation.

Mapping of a set into and onto another (the concept of function), one-to-one mapping, inverse mapping, inverse function.

Denumerability.

Binary composition; group, ring, field.

2. *Numbers*

The natural numbers. Axiom of induction. Primes.

Greatest common divisor, Euclid's algorithm.

The ring of integers, equivalence classes modulo an integer.

The field of real numbers, its continuity, upper and lower bound, non-denumerability, infinite decimal fractions.

Absolute value.

The field of rationals, its denumerability.
The field of the complex numbers.

3. *Combinatories*

Combinations and permutations, binomial formula.
The concept of a finite probability distribution.
Examples of determination of probabilities by means of combinatories.

4. *Equations and inequalities*

Equations and inequalities of first and second degree with one unknown.
Equations and inequalities of first degree with two unknowns.
Simple examples of other equations.
Second order equation and the binome equation in the complex field.

5. *Plane geometry*

The rectangular coordinate system. Change of coordinates.
Vectors and their coordinates. Vector algebra including scalar product.
Analytic representations of a line.
Distance and angle.
Analytic representations of a circle.
Area of triangle and parallelogramme.
Definition and analytic representation of parabola, ellipse, hyperbola.
Mappings of the plane onto itself; parallel displacement, rotation, reflection, multiplication and composition of these mappings. Orthogonal affinity.

6. *Solid geometry.*

The rectangular coordinate system.
Vectors and their coordinates. Vector algebra including scalar product.
Parametric representation of a line.
Analytic representations of the plane.
Distance and angle.
Equation of the sphere, spherical coordinates, spherical distance between two points (the cosine relation).
Polyhedra, Euler's theorem, the regular polyhedra.
Volume of prism, pyramid, right circular cylinder and cone, sphere.

Surface area of right circular cylinder and cone, sphere; area of spherical triangle.

Congruence and symmetry.

7. *Elementary functions*

The linear function of one variable.

The linear function of two variables.

Polynomials in one variable, including their factorization, greatest number of roots, determination of rational roots in polynomials with integral coefficients.

Rational functions of one variable.

Logarithmic functions, logarithmic scale, use of slide-rule and logarithm tables.

Exponential functions, power functions.

The trigonometric functions, addition formulae, logarithmic formulae. Application of trigonometric functions to oscillations and to computation of unknown sides and angles in a triangle.

The linear function of one complex variable and its geometrical interpretation.

8. *Calculus*

The concept of limit.

Continuity and differentiability of a real function of one real variable. Continuity and differentiability of a vector function of one real variable (tangent vector).

Differentiation rules.

Taylor's formula (approximating polynomials), differentials.

The indefinite integral as a limit of sums.

The indefinite integral.

Integration rules, including integration by parts and integration by substitution.

9. *Applications of the calculus*

Determination of the range of a function and intervals of monotonicity.

Simple examples of determination of asymptotic properties of functions.

Drawing of graphs of given functions, and drawing of curves determined by a simple parametric representation.

Velocity vector, speeed, acceleration vector.

Determination of areas and volumes by integration.

Examples of applications of the calculus in probability theory.

Examples of application of the calculus to numerical problems and to problems in physics and other subjects.

Examples of simple differential equations.

10. *A subject chosen by the teacher*

B. *Comments on the subject list*

General remarks

The subject list does not intend to indicate a chronological arrangement of the material. It is left to the teacher to decide what he finds appropriate from a pedagogical and systematic point of view. Also collaboration with the instruction in physics and other subjects has to be taken into consideration.

The teachers are recommended occasionally to comment on the origin of important notions and their historical development.

Numerical calculations should not be neglected. Sliderule, tables, nomograms, and function paper should appear as tools.

When dealing with examples from e.g. physics the teacher is supposed to show the students that the use of mathematics is in accordance with definitions and theorems, even if the language of physics appears shorter than is customary in mathematics.

Re point 1

Set theory is primarily thought to be employed as a means of clarifying the fundamental concepts and reasonings and as a basis for a precise and up to date mathematical mode of expression. The set theoretical concepts should be defined at moments when the discussion of other subjects makes this natural. General set theoretical concepts should be illustrated by varied examples, both new ones and examples from material taught in grades 8—9.

Elements of logic are not mentioned in the list, but it is recommended to use set-theoretical considerations to illustrate some of the basic logical rules. If this is done e.g. in connection with equations and inequalities the pupils will gain a better understanding and not only manipulative skill.

A function should be defined in the general form, as a mapping from one set into another. The use of this notion of a function throughout in the teaching of the various topics in the mathematics curriculum will have a great unifying power.

An extended course in abstract algebra is not intended. The fundamental concepts, rule of composition, group, ring and field shall form the basis for a description of the algebraic structure of the

number system. Through examples from different fields of mathematics the algebraic concepts can illuminate the connexion between subjects which otherwise seem wide apart.

Re point 2

The students should realize the fundamental role played by the axiom of induction; in particular its application to proof by induction should be made clear.

Concerning prime numbers only the theorem that the set of prime numbers is infinite, and the theorem about unique factorisation in primes are required.

A precise description of the algebraic structure, ordering and continuity of the system of real numbers should be given, but no construction of the system of real numbers from the system of rational numbers should be included.

The students should acquire skill in working with absolute value. In exercises absolute value should appear in equations, inequalities and in connexion with functions.

Re point 3

The students will have to become acquainted with the general concept of a finite probability field. The treatment should not be restricted to fields where all points have the same probability. It is here a question of presentation of a simple mathematical model and the application of the terminology attached to this model.

Re point 4

Some types of equations of which only examples should be given are: A system of three linear equations with three unknowns; one equation of first degree, the other of second degree; equations in which the unknown appears under a square root; exponential equations and trigonometrical equations with one unknown. The examples of these kinds of equations should be simple.

Re point 5

Change of coordinates must comprise parallel displacement and rotation of the coordinate system.

In analytic geometry the vector concept should play a central part.

The expression 'analytic representation of a line' refers to coordinate- as well as vector-equations, parametric representation and normalized equations.

The treatment of conics can be restricted to derivation of the equations of parabola, ellipse and hyperbola based on a geometric definition of these curves. Special properties of conic sections (theorems about tangents etc.) can be dealt with in exercises.

As indicated in the list of subjects the mappings in question (parallel displacements, rotations, etc.) are meant to be considered as mappings of the entire plane onto itself and not as mappings only of single figures. However, an account should be given of how characteristics of the figures, e.g. the sizes of distances, angles and areas, are transformed under the mappings (invariant and not invariant characteristics). Especially the fact that a circle is mapped onto an ellipse by an orthogonal affinity should be demonstrated. In this connexion the parametric representation of the ellipse can be mentioned.

Re point 6

Fundamental theorems about parallelism and orthogonality of lines and planes are presented (without proofs) to an extent necessary for the introduction of orthogonal coordinates and the treatment of polyhedra.

The analytic representations of planes must include coordinate- as well as vector-equations and also normalized equations.

Exercises in applications of spherical coordinates should include problems concerning geographic and astronomic subjects.

Regular polyhedra should be considered in detail only in case of the tetrahedron the cube and the octahedron.

Re point 7

In connexion with linear functions of two variables and their level lines one can treat problems about maxima and minima of such functions restricted to domains determined by linear inequalities (linear programming).

Besides the function theoretical description of polynomials it must be demonstrated that the set of polynomials forms a ring, and the analogy between integers and polynomials should be stressed.

Practice in the use of the slide-rule should concentrate on its principle and elementary applications. Not too much time should be spent on technical points of the use of the slide-rule.

Presentation of the application of trigonometric functions should include the fact that a linear combination of pure oscillations with the same period is a pure oscillation.

Re point 8

During the last 30 years the treatment of calculus in the Danish gymnasium has reached a rather high level. Not only manipulative skill, but a careful introduction of basic notions and rigorous proofs were aimed at.

It is implicitly recommended not to overemphasize rigorous considerations.

In connexion with the concept of limit, standard theorems about limits of sums and products etc. should be mentioned. Proofs can be confined to only one or two of these theorems.

The selection of proofs of the basic theorems on continuous functions is left to the teachers decision.

The students should be given the opportunity to carry out approximate computations of the values of certain functions on the basis of Taylor's formula.

Re point 9

Calculations of volume by integration should comprise computation of the volume of rotational solids and pyramids.

The use of frequency functions as basis for determination of finite probability fields is understood to be based on a postulate which states that in every particular case there exists a function with the property that the probability distribution corresponding to an arbitrary finite division of the set of real numbers in sub-intervals can be determined by integration of this function over the sub-intervals. Thus the presentation can be kept inside the frame of the theory of finite probability fields, and the problems will actually be exercises in integration, formulated in the language of probability theory.

The treatment of simple differential equations may be limited to the mention of the equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx} = g(y) \quad (g(y) \neq 0)\,.$$

Simple calculations of moments of inertia and centres of gravity can be included as examples of applications of infinitesimal calculus to physics.

Re point 10

Contents, extent and mode of treating the optional subject should be adapted in such a way that the students are not in this field faced

with more difficult problems than these arising from the other lessons of mathematics.

Some examples of the fields from which the optional subject may be taken: History of mathematics, number theory, matrices and determinants, theory of groups, set theory, Boolean algebra, differential equations, series, probability theory, statistics, theory of games, topology, projective geometry, theory of conics, non-euclidian geometry, geometry of higher dimensions, geometrical constructions, descriptive geometry.

The optional subject may also be chosen in connection with the corresponding part of the physics course. As examples of suitable subjects may be mentioned: Probability theory and kinetic theory of gases, differential equations and oscillatory circuits. Finally the optional subject may be organized in connexion with other subjects than physics, e.g. probability theory and heredity.

The program for the optional subject will have to be submitted to the inspector of schools for approval.

KORREL CXXV
(bewijs uit het ongerijmde en contrapositie)

In Euclides **38**, blz. 20, schreef ik een kort stukje over het bewijs uit het ongerijmde en de contrapositie. Als we gebruik maken van kennis van de propositielogica, is het mogelijk deze onderwerpen op een andere manier te beschouwen.

Voor alle zekerheid volgt hier eerst een eenvoudig voorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde.

Gegeven. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ (zie fig. 1). (A)

Te bewijzen. A, B, C en D liggen op één cirkel. (B)

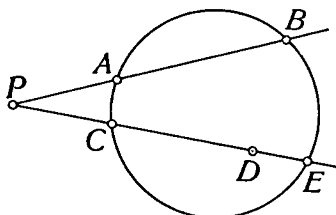


Fig. 1

Bewijs. Onderstel, dat A, B, C en D niet op één cirkel liggen. De cirkel door A, B en C snijdt de halve lijn PC dan, behalve in C, in een

punt E, dat van D verschilt. Dan is $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ en $PA \cdot PB = PC \cdot PE$ en dus $PD = PE$. De punten D en E vallen dan samen. Dit is in strijd met het gevonden resultaat, dat D van E verschilt. Op grond van deze gevonden contradictie wordt nu besloten, dat de stelling bewezen is.

Ik geef deze (didactisch verwerpelijke) redenering in extenso, omdat de structuur van een bewijs uit het ongerijmde er zo duidelijk uit blijkt. Te bewijzen is een stelling van de vorm

$$A \rightarrow B.$$

In de redenering gaan we niet uit van A om ten slotte bij B aan te landen, maar we gaan uit van 1e A en 2e $\neg B$. Nu bewijzen we, dat hieruit een contradictie afgeleid kan worden. En op grond daarvan besluiten we ertoe, dat $A \rightarrow B$ juist is.

Het is gemakkelijk deze bewijsmethode te rechtvaardigen, als we gebruik maken van waarheidstabellen. We stellen een contradictie voor door Cd; een uitspraak Cd heeft een tabel van waarheidswaarden, die uitsluitend uit 0'en bestaat. We moeten nu vergelijken de beide uitspraken

$$A \rightarrow B \text{ en } (A \wedge \neg B) \rightarrow \text{Cd}.$$

De waarheidstabellen, die bij deze uitspraken behoren, zijn

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	Cd	$(A \wedge \neg B) \rightarrow$ Cd	$A \rightarrow B$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1

We zien uit deze tabel, dat de waarheidswaarden van $(A \wedge \neg B) \rightarrow$ Cd en van $A \rightarrow B$ steeds aan elkaar gelijk zijn. Deze beide uitspraken zijn dus gelijkwaardig. Kunnen we één van beide bewijzen, dan is de andere dus ook bewijsbaar.

In genoemd artikel is ook de contrapositie ter sprake gebracht. De toelaatbaarheid van de contrapositie, d.w.z. de gelijkwaardigheid van de uitspraken $A \rightarrow B$ en $\neg B \rightarrow \neg A$, is direct te verifiëren. De waarheidstabellen van $A \rightarrow B$ en van $\neg B \rightarrow \neg A$ zijn namelijk hetzelfde.

Als we van een verantwoorde fundering van de propositielogica uitgaan is er dus geen sprake van, dat we tot dergelijke verwarrende resultaten komen als in het genoemde artikel. Men zal nu niet in de verleiding komen de contrapositie af te leiden door middel van een bewijs uit het ongerijmde. Tot dergelijke aanvechtbare redeneringen

komt men alleen, als men niet beschikt over een behoorlijke fundering van de materie, waarover men redeneert. Bij het middelbaar onderwijs beschikt men uit de aard der zaak niet over een dergelijke fundering. En daarom moet men daar goed op zijn tellen passen, wil men niet drogredenen de plaats laten innemen van een sluitend betoog.

P. G. J. Vredenduin

BOEKBESPREKING

A. J. Poelman en Bruno Ernst, *Gids door de algebra*, deel I, 115 blz., *f* 4,50; deel II, 140 blz., *f* 5,50; deel III, 136 blz., *f* 5,50;

Repetitieboek bij gids door de algebra, 112 blz., *f* 4,50; Thieme & Cie, Zutphen; zonder jaartal.

De auteurs van deze algebraboeken zijn op het gebied van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs bewonderenswaardig actieve figuren. Men mag dus een frisse opzet verwachten. In deze verwachting wordt men bij het doorbladeren van deze boeken niet teleurgesteld. Al onmiddellijk vallen allerlei afwijkingen van de traditionele leerboeken op, afwijkingen, die veelal verbeteringen of op zijn minst interessante experimenten zijn. Belangwekkend is bijvoorbeeld het idee om reeds in deel I op eenvoudige wijze de logaritmen te behandelen. De theoretische grondslag voor het rekenen met logaritmen vindt men in deel III, waar ook de rekenliniaal wordt behandeld. Opvallend is ook het omschrijven van het begrip „functie" als een „automaat" waar men een „bronwaarde" instopt om een „functiewaarde" te verkrijgen; dit in navolging van prof. dr. N. H. Kuiper. Daarentegen spelen de verzamelingen in dit boek nauwelijks een rol; alleen de oplossing van een vierkantsvergelijking wordt wel als bv. $\{3, -5\}$ geschreven.

Veel aandacht wordt besteed aan de motivering van het gebruik van letters in de algebra (deel I hoofdstuk 3).

Bijzonder nuttig lijkt mij ook het bestaan van een repetitieboek dat de stof van de drie delen nog eens doorneemt. Als ik het goed begrepen heb zal op deze delen nog een vierde deel volgen, dat dan waarschijnlijk de stof van de B-afdeling zal bevatten.

Is men dus in eerste instantie geneigd veel goeds van dit werk te zeggen, men verandert van mening als men zich zet tot aandachtig doorlezen. Een leraar die deze boeken invoert houde ze angstvallig uit de buurt van zijn collega Nederlands. Want wat voor goeds onze leerlingen ook uit deze boeken mogen opsteken, goed Nederlands zullen ze er beslist niet uit leren. Bij hoofdstuk 1 van deel I staat als motto: „In plaats van lange zinnen kunnen we eigenschappen beknopt met lettergetallen opschrijven."

In de lange vetgedrukte zin op pag. 12 staat „die van" te veel, waardoor de zin niet loopt. Enkelvoud en meervoud worden door elkaar gehaald op pag. 11: „Schrijf de quotiënten van de volgende delingen als een macht van 2." Lelijk is het niet-herhalen van het lidwoord in zinnen als: „In een breuk kan de teller en/of noemer negatief zijn." (deel II, pag. 19). Dit „en/of" is trouwens ook wiskundig niet fraai. Sommige gedeelten zijn gesteld in een soort opgeschreven spreektaal, waarin niet altijd een bepaalde fout is aan te wijzen, maar die aan helderheid te wensen overlaat:

een mistig Nederlands. Ook wat betreft de wiskundige terminologie houden de schrijvers er afwijkende gewoonten op na. Men vergelijke bijvoorbeeld het gebruik van de termen „quotiënt", „breuk" en „deling" in de volgende zinnen. „We hebben ontdekt dat we een deling door een getal kunnen delen door het deeltal door dit getal te delen of de deler met het getal te vermenigvuldigen." (deel I, pag. 42) „Als van een breuk de teller positief en de noemer negatief is dan is het quotiënt . . ." (deel I, pag. 61) „Achter één soort delingen kunnen we echter geen antwoord zetten en wel als de noemer gelijk nul is." (deel II, pag. 19).

Ondanks hun motto boven hoofdstuk 1 van deel I hechten de auteurs toch blijkbaar veel waarde aan lange vetgedrukte zinnen. Zo geven ze van de evenredigheden twaalf(!) eigenschappen, waarbij we dit fraaie stijlbloempje nog willen plukken: „Als we in een evenredigheid een buitenste term met een getal vermenigvuldigen mits we de andere buitenste term door dat getal delen, ontstaat er een nieuwe evenredigheid." (deel II, pag. 12).

Soms is de tekst bepaald misleidend. Volgens de op pag. 34 van deel I aangegeven volgorde van bewerkingen gaat optellen voor aftrekken. Op de volgende bladzijde staat dan: „De volgorde van het optellen en aftrekken kan (soms) verwisseld worden." Dan volgen een paar voorbeelden. Wat betekent dat tussen haakje gezette „soms"? Op pag. 69 van deel II wordt terecht afgesproken dat de wortel uit een positief getal positief zal zijn. Mochten we kiezen, zo zeggen de schrijvers, dan waren er voor $\sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{25}$ acht antwoorden mogelijk. Dat het er hier toevallig zeven zijn doet aan de juistheid van de redenering niets af. Maar wel is het erg, dat de schrijvers aan het slot van hun betoog alles weer bederven door te zeggen: „Is het niet bekend of a positief of negatief is, dan spreken we af $\sqrt{a^2} = a$."

Overigens laten de schrijvers bij het onderwerp worteltrekking een prachtige gelegenheid voorbijgaan om het door hen gewenste begrip „automaat" in te voeren: „$\sqrt{\ }$" is zo'n automaat. Nu introduceren ze dat begrip twee hoofdstukken verder aan de hand van het voorbeeld van een door een fietser in de tijd t afgelegde weg s, waarvoor geldt: $s = 15t$. Dit wordt dan geschreven als: $f : t \rightarrow 15t = s$. Ze zeggen dan: „$15t$ noemen we de automaat." Dit lijkt mij niet juist: $15t$ is de functiewaarde die bij de bronwaarde t behoort. De automaat zou men „15 maal", „15-voud" of iets dergelijks moeten noemen. Ook in deel III vindt men de bij de bronwaarde k behorende functiewaarde als de automaat aangeduid, bijvoorbeeld op bladzijde 7: „De vorm $x^2 - 2x - 3$ noemen we de automaat". Van een duidelijk onderscheid tussen functie en functiewaarde komt zo niets terecht.

Bij het afleiden van de bekende formule voor s_n van een meetkundige rij wordt terecht opgemerkt, dat deze formule niet geldt voor $r = 1$. (deel III, pag. 99). Maar op pag. 121 wordt bij de oneindig voortlopende meetkundige rij toch $r = 1$ in die formule gesubstitueerd, waarna de volgende conclusie wordt getrokken: „Omdat 0/0 geen getal is, bestaat lim s_n niet als $r = 1$". Met hetzelfde recht zou men dan ook kunnen constateren, dat s_n niet bestaat voor eindige n, als $r = 1$.

Ik zal niet doorgaan met het opnoemen van fouten en slordigheden. Men treft ze door het gehele werk allerwege aan. Grappig is nog wel de drukfout „bekeren" voor „bereken" (rep. boek, pag. 100).

Ik hoop inderdaad, dat de auteurs zich van deze nonchalante wijze van boekjesschrijven zullen bekeren. De opzet van het boek is helemaal niet gek. Hoe aardig had bijvoorbeeld het vermelden van historische bijzonderheden kunnen zijn als de auteurs niet zo onnoemlijk slordig met namen en feiten waren omgesprongen.

Ik hoop van harte, dat de schrijvers de gelegenheid zullen krijgen hun werk nog eens zeer kritisch te bekijken en dan een correcte tweede druk te laten verschijnen. Pas dan zal men kunnen zeggen, dat de zaak der vernieuwing met dit werk gebaat is.

R. Troelstra

Schrödinger-Planck-Einstein-Lorentz, *Briefe zur Wellenmechanik.*

Hrsg. in Auftrage der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, von K. Prziban. Mit 4 Porträts. 68 blz. 1963, gebonden $ 2.50.

Zoals uit de titel blijkt bevat dit boek een briefwisseling tussen Schrödinger-Planck (elk vier stuks in 1926), Schrödinger-Einstein (elk vijf in de periode 1926—1950) Schrödinger-Lorentz (drie, 1926) met prachtige foto's van de briefschrijvers. Het is een sensatie te lezen hoe deze groten ook worstelen met de grote problemen die hen gesteld worden. Zo schrijft Planck aan Schrödinger: „Sie können sich denken, mit welcher Teilnahme und Begeisterung ich mich in das Studium dieser epochemachenden Schriften versenke, obgleich es bei mir jetzt sehr langsam vorwärtsgeht mit dem Eindringen in diese eigenartigen Gedankengänge. Ich hoffe dabei stark auf den fördernden Einflusz einer gewissen Gewöhnung, die den Gebrauch neuer Begriffe und Vorstellungen mit der Zeit erleichtert, wie ich das schon oft erprobt habe."

Burgers

C. van der Linden, *Goniometrie en Trigonometrie*, Prisma-Compendium, Utrecht, 1964, blz. 189.

In dit boekje wordt een overzicht gegeven van de elementaire goniometrie en trigonometrie. Aansluitend een behandeling met vectoren en iets over landmeetkunde en boldriehoeksmeting.

Het veelal ontbreken van afleidingen en bewijzen van formules en stellingen maken dit boekje als studieboek ongeschikt. Daarvoor is het echter ook niet geschreven.

Burgers

Prof. H. Tietze, *Problemen uit de Wiskunde*, dl. 2, Ned. bewerking door Bruno Ernst, N.V. W. J. Thieme en Cie, Zutphen, 1964, 160 blz.

Ter sprake komen: De regelmatige zeventienhoek, het oplossen van algebraïsche vergelijkingen door worteltrekkingen, het vierkleurenprobleem, het probleem van Fermat en ruimtekromming. Men vindt de formules voor de wortels van een derde- en vierdegraads vergelijking, natuurlijk zonder afleiding, bijzonderheden uit het leven van vele grote wiskundigen, eenvoudige begrippen uit de leer van de verzamelingen, iets over kettingbreuken enz. Het geheel wordt zeer breedsprakig opgedist. Veel wiskundige kennis is dus niet verwacht. Voor een schoolbibliotheek wel geschikt.

Burgers

Wiskunde in de 20e eeuw, 3, Internationale perfectioneringscursussen voor doctoraten en licentiaten in de wiskunde; derde jaar, Brussel 24—30 augustus 1962, 153 blz.

Verkrijgbaar bij het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, Dienst verkoop van publikaties, Etterbeekse steenweg, Brussel. Prijs 45 BF.

In het artikel van Beth over de axiomatiek van de theorie van de verzamelingen zonder het oneindigheidsaxioma worden we weer eens verrast door de gave van de, onlangs overleden, schrijver in kort bestek een boeiend probleem uiteen te zetten. Hij gaat uit van een axiomastelsel van de verzamelingsleer en geeft daarvan een simpel aritmetisch model. Dit model blijkt erg beperkt te zijn, in die zin dat de vertaling van de eigenschappen van de verzamelingsleer in de rekenkunde een zo gering deel daarvan blijken te omvatten, dat waarschijnlijk optelling en vermenigvuldiging niet definieerbaar zijn. Daarna worden de ordinaalgetallen in dit verband besproken.

Borgers behandelt de logische descriptie en de definitie. Als een verzameling uit één element bestaat, kunnen we in de taal gebruik maken van het bepaalde lidwoord. B.v.: de man, die in 1960 in Nederland minister van onderwijs was; het priemgetal, dat even is. Het enige element van de verzameling $\{x|f(x)\}$ noteert men veelal $(\iota x)f(x)$. Men noemt dit een descriptie. De schrijver zet het gebruik van de descriptie uiteen en laat zien, op welke wijze descripties gebruikt kunnen worden bij het definiëren. B.v. bij de definitie van een quotiënt: a/b is het getal x, waarvoor geldt $bx = a$ $(b \neq 0)$.

Dieudonné laat ons genieten van een korte en kernachtige beschouwing over de klassieke groepen in de meetkunde. Eerst bespreekt hij de orthogonale groep, echter op een manier die voor menigeen veel nieuws bevat. De normale delers van de groep worden opgespoord. Daarna gaat hij meer algemeen over op de groep van automorfismen van een vectorruimte en de belangrijke ondergroepen ervan, zoals de orthogonale (eventueel de unitaire) en de projectieve groep. Op deze wijze maakt hij de inhoud van het Erlanger programma van F. Klein nog eens duidelijk.

Het meest omvangrijke artikel is ook ditmaal van Hirsch. In een plezierig leesbaar artikel zet hij de grondbeginselen van de algebraïsche topologie uiteen. De afbeeldingen, die wel eens met een merkwaardige term meerwaardige functies genoemd worden, zoals $\sqrt{z}$ (z complex), kunnen weergegeven worden door een afbeelding van het complexe vlak op een soort dubbelvlak, waarin een caesuur langs de positieve reële as is aangebracht. Dit soort oppervlakken noemt men oppervlakken van Riemann. De theorie ervan is weliswaar niet modern, maar zeer de moeite waard. Van de Riemannse oppervlakken komt de schrijver tot een karakteriseren van oppervlakken door het aangeven van de topologisch verschillende soorten gesloten wegen, die er op mogelijk zijn. De topologische gelijkwaardigheid wordt met zorg gedefinieerd. Topologisch gelijkwaardige wegen heten homotoop. Karakteristiek voor een oppervlak is zijn homotopiegroep, d.i. de groep van homotope gesloten wegen. Deze vormen een groep, doordat er een samenstelling gedefinieerd is, namelijk het achtereenvolgens doorlopen van twee wegen.

Verder vinden we nog enige kortere en soms nogal compact geschreven bijdragen van Libois over lineaire ruimten, van Teghem over Markov ketens, van Van Albada over enige problemen van de metrische meetkunde (zoals het aantal tetraeders, dat met zes gegeven ongelijke ribben gemaakt kan worden) en van Van der Blij over differentiaties (gradiënt, rotatie, divergentie, met fysische toepassingen).

P. G. J. Vredenduin

Dr. A. Heyting, *Projectieve meetkunde*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1963, 126 blz., ing. ƒ 12,—, geb. ƒ 13,90.

Men zegt wel eens slordig, dat de projectieve meetkunde in het platte vlak meetkunde in de driedimensionale euclidische lijnenschoof (verzameling van lijnen door een vast punt) is. Iets nauwkeuriger geformuleerd is het projectieve vlak isomorf met de verzameling van eendimensionale deelruimten van een driemensionale lineaire ruimte. Deze omschrijving kan gegeneraliseerd worden voor willekeurige dimensie. Dit inzicht heeft de schrijver tot leidraad gediend om de projectieve meetkunde op te bouwen. Heeft men dit eenmaal goed begrepen, dan zal de bestudering van dit boek geen grote moeilijkheden meer opleveren. Op heldere en eenvoudige manier wordt de vanouds bekende projectieve meetkunde ons uiteengezet. Hierbij wordt ook aandacht besteed aan de orderelaties; zo wordt bewezen, dat een niet ontaarde kegelsnede het projectieve vlak in twee delen verdeelt.

Daarna wordt in kort bestek duidelijk gemaakt, hoe affiene meetkunde, gelijkvormigheidsmeetkunde en metrische meetkunde uit de projectieve meetkunde afgeleid kunnen worden. De schrijver definieert een affien vlak als „een projectief vlak, waarin een lijn is uitverkoren". Hoewel dit natuurlijk te verdedigen is, lijkt het me uit didactisch oogpunt onduidelijk. M.i. is een affien vlak een paar $\{\alpha, l\}$, waarin α een projectief vlak is en l een lijn, waarvoor geldt $l \subset \alpha$. Men wordt, als men het zo formuleert, niet op een dwaalspoor gebracht door de psychologisch belaste term „uitverkoren".

Ieder, die op de hoogte is van de beginselen van de lineaire algebra en op moderne wijze (opnieuw) met projectieve meetkunde in contact wenst te komen, kan ik dit boek van harte aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

Robert C. Wrede, *Introduction to Vector and Tensor Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., London — New York — Sydney, 1963, 418 + XII blz., 74 sh.

Als men tegenwoordig de term „vector" leest, denkt men aan een abstracte vectorruimte. Het is echter geenszins de bedoeling van de auteur zich te verdiepen in het abstracte vectorbegrip; integendeel, de in dit boek behandelde vectoren zijn gewone driedimensionale vectoren. De behandeling hiervan is gericht op de toepassing in de mechanica, zowel op de klassieke als op de relativistische.

Merkwaardig is in dit verband, dat het uitwendige produkt van twee vectoren als een vector opgevat wordt; iets dat alleen in de driedimensionale ruimte mogelijk is en alleen gewenst en gemakkelijk is, als men op snelle wijze de vectorrekening in de mechanica wil gaan toepassen.

Nadat men in de eerste 200 pagina's grondig met vectoren heeft kennisgemaakt, volgen twee hoofdstukken over vectorvelden en scalarvelden. In deze hoofdstukken komt de in de titel genoemde „analyse" tot haar recht. De bekende begrippen gradiënt, divergentie en rotatie komen ter sprake, lijn- en oppervlakte-integralen, wet van Stokes, enz.

In het laatste hoofdstuk worden de tensoren besproken. Ook hier is de behandeling klassiek: een tensor in de n-dimensionale ruimte is een stelsel van n^k getallen, dat op bepaalde manier (covariant en contravariant) getransformeerd wordt. Vectoren en scalairen worden zo tot een bijzonder geval van tensoren. Het boek eindigt met een korte toepassing van de tensoren in de algemene relativiteitstheorie.

De stof wordt helder uiteengezet; het boek is gemakkelijk leesbaar, mede door geschikt gekozen notaties.

P. G. J. Vredenduin

A. M. Macbeath, *Elementary Vector Algebra*, Oxford Un. Press, Londen, 1964, 125 blz., 10/6.

Dit boekje is een meetkundige inleiding tot de elementaire vectoralgebra. De behandeling steunt op het intuïtieve vectorbegrip, dus op vectoren bepaald door lengte en richting.

Door bewerkingen te definiëren ontstaat m.b.v. van deze vectoren een algebra, die sterk afwijkt van de bekend veronderstelde „gewone" algebra. Deze verschillen zijn het meest opvallend bij de behandeling van de vermenigvuldiging.

De schrijver dwingt de lezer tot bezinning op de gegeven definities en tevens op de rekenregels van de „gewone" algebra.

Naast de „pijltjes". behandeling volgt dan de overgang naar de „coördinaten" behandeling, waarbij de driedimensionale voorbeelden het meest markant zijn.

Het was misschien toch wel nuttig geweest, indien tevens de aandacht gevestigd was op de mogelijkheid abstracte vectoren te gebruiken in de gevormde algebrastructuur.

Al met al een keurig verzorgd boekje, dat men een goede leerling kan aanbevelen en dat deze zonder hulp met genoegen zal doorwerken.

Burgers

W. J. Brandenburg en L. Schrier, *Inleiding in de meetkunde*, deel 3., J. B. Wolters, Groningen 1964, *f* 3,90.

Van deze inleiding werden het eerste en tweede deeltje besproken resp. in „Euclides" 38, blz. 59 en 155.

Het uiterlijk van dit derde deeltje is even goed verzorgd als dat van het andere. Behalve de gebruikelijke leerstof in een omvang zoals deze tegenwoordig in de derde klassen van de middelbare scholen behandeld wordt, bevat het werkje een aantal „uitzichten": n.l. op de vectorrekening; de meetkunden; de analytische meetkunde; de stereometrie; de verzamelingleer; de groepentheorie en de goniometrie.

Deze zijn volgens de voorrede o.m. „bedoeld als kennismaking met de leerstof uit de bovenbouw, welke steunt op kennis van de vlakke meetkunde". De bestudering ervan lijkt de schrijvers verder nuttig met het oog op de keuzebepaling der leerlingen voor de A of B-richting.

Over het nut van dergelijke „uitzichten" kan men van mening verschillen. De meesten zijn te kort, vooral het „uitzicht op de meetkunden", om veel betekenis te hebben.

Het „uitzicht op vectoren" is grondiger. Jammer, dat hiervan in het „uitzicht op de analytische meetkunde" niet verder gebruik van wordt gemaakt. Dan was b.v. een aardige inleiding ontstaan op het werkje „*Basis voor de analytische meetkunde*" van dr. J. Bijl, dr. D. Kijne en W. J. H. Salet, dat op verschillende scholen gebruikt wordt.

Voor wat in § 65 (in het „uitzicht op de goniometrie") gezegd wordt over de grafiek van functie cos x, mag ik de schrijvers wel verwijzen naar het artikel „Als het maar wat kronkelt", van P. Wijdenes in „Euclides, 37, bladz. 252.

Het geheel is wel bruikbaar.

J. F. Hufferman

ONTVANGEN BOEKEN

Max Jeger, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Räber Verlag, Luzern/Stuttgart, derde dr. 97 blz. 1964.

Op enkele wijzigingen na is deze derde druk gelijk aan de vorige.

Verzameling van Mechanicavraagstukken voor het v.h.m.o., samengesteld door een Velinescommissie, J. B. Wolters, Groningen, 2e druk, *f* 1,40.

Ph. Albert, *l'Analyse par radioactivation*, Alb. de Visscher, Brussel, 164 blz., 150 BFr.

Een samenvatting van de toepassingen van radioactiviteit voor de chemische analyse met vele tabellen.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*" in het MC 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 17 februari 1965:

Prof. Dr. A. H. M. Levelt: Onderwerp nog niet bekend. Aanvang 20 uur

In de serie „*Actualiteiten*" in Hotel Krasnapolsky, Warmoesstraat 173—179, Amsterdam op zaterdag 27 februari 1965:

Dr. J. Neggers: „Afgeleiden op p-adische lichamen". Aanvang 14 uur.

STERRENWACHT UTRECHT

Evenals vorige jaren wordt een cursus sterrenkunde voor leraren en andere afgestudeerden georganiseerd. Als onderwerp voor dit jaar is gekozen:

DE EXTRAGALACTISCHE STELSELS,

een onderwerp, dat in de laatste jaren zeer in de belangstelling is gekomen door de plannen voor een grote Nederlands-Belgische radio-interferometer (Benelux kruisantenne project) en door de ontdekking der kwasi-stellaire radiobronnen.

De lezingen worden gehouden in het Universiteitsgebouw, Domplein 29, te Utrecht. Ze vangen aan om 19.30 uur precies en duren tot 21.15 uur, met een pauze om 20.15 uur.

Agenda:

Donderdag 18 februari: Dr. A. D. Fokker: *De extra-galactische stelsels.*
Donderdag 25 februari: Prof. Dr. J. H. Oort: *Radiostraling buiten de melkweg.*
Donderdag 4 maart: Dr. H. van Woerden: *Kwasi-stellaire radiobronnen.*
Donderdag 11 maart: Prof. Dr. G. B. van Albada: *Kosmologische problemen.*

Men geve zich voor deelname schriftelijk op bij de administratie der Sterrenwacht, Zonnenburg 2, Utrecht. Aan de deelname zijn geen kosten verbonden. Leraren kunnen hun reiskosten vergoed krijgen.

STICHTING TELEVISIE ACADEMIE TELEAC

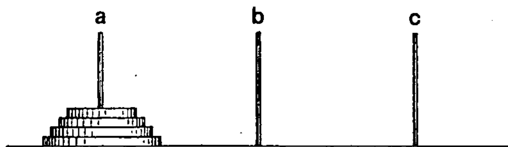
Cursus „*Moderne Onderwijsmethoden en Didactiek*". Wekelijkse uitzendingen via het televisienet op woensdagavonden van 22.40 — 23.10 (met heruitzending op zaterdagochtend om 10.00 uur). Redactiecommissie Prof. Dr. L. van Gelder, Dr. C. Souren, Drs. C. van der Zwet. De eerste les op 10 februari 1965 is gewijd aan *Didactiek (algemeen)*.

Men kan zich zonder enige verplichting per briefkaart als cursist aanmelden (Teleac, postbus 225, Delft) en ontvangt dan de cursusgids met rooster uitzendingen, systematisch overzicht te behandelen stof, literatuuropgave enz.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

125. Op pin a bevinden zich een aantal schijven. De onderste schijf heeft de grootste diameter. Een hogere schijf heeft een kleinere diameter dan een lagere. De schijven moeten overgebracht worden naar pin b of c. Daarbij mag slechts één schijf tegelijk van een pin naar een andere verplaatst worden, terwijl nooit een grotere schijf op een kleinere geplaatst mag worden. Is dat mogelijk?



126. In de opgave 122 werden drie kubussen met ribbe 1 opgestapeld. Er bleek, dat de bovenste kubus maximaal $\frac{3}{4}$ kon uitsteken. Nemen we meer kubussen, dan wordt dit bedrag uiteraard groter. Hoe groot kan het worden, als we het aantal kubussen naar believen mogen vergroten?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

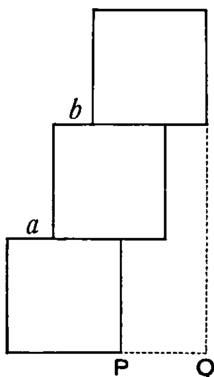
122. Stel de ribbe van de kubus 1 en noem de stukken, waarover de kubussen t.o.v. de onderliggende verschoven zijn a en b. Dan moet

$$a \leqq \tfrac{1}{2},\ b \leqq \tfrac{1}{2} \text{ en } a + b + \tfrac{1}{2}(1 - b) \leqq 1.$$

Hieruit volgt

$$a + \tfrac{1}{2}b \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Was $a + \frac{1}{2}b < \frac{1}{2}$, dan was het mogelijk a of b nog groter te kiezen. We mogen dus aannemen, dat $a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}$. We moeten nu het maximum berekenen van $a + b$. Dit is dus gelijk aan $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$. Dit is maximaal, als $b = \frac{1}{2}$ (en $a = \frac{1}{4}$). Het maximum is gelijk aan $\frac{3}{4}$.



123. Noem de kleuren 1, 2, 3 en 4. De bovenste twee rijen velden voorzien we op willekeurige manier van deze kleuren op zodanige manier, dat we niet met de gestelde eisen in strijd komen. B.v.

1	2	4	2	4	3	1	2
4	3	1	3	1	2	4	3

We kunnen de twee kleuren in de 3e—8e kolom verwisselen. Dit geeft 2^6 mogelijkheden. Verder kunnen we de kleuren in het linker vierkant permuteren. Dit geeft 4! mogelijkheden. In totaal dus $4! \cdot 2^6$ mogelijkheden.

Nu zien we, dat de kleuren in de verdere rijen eenduidig bepaald zijn door de gegegeven kleuren in de eerste twee rijen. We zijn namelijk verplicht als volgt verder te gaan:

1	2	4	2	4	3	1	2
4	3	1	3	1	2	4	3
1	2	4	2	4	3	1	2
4	3	1	3	1	2	4	3

enz.

Het is echter de vraag, of de eerste twee rijen altijd de kleuren in de overige rijen eenduidig bepalen. Dit blijkt alleen niet het geval te zijn, als we de beginrijen op de volgende manier kiezen:

1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3

We kunnen nu als derde rij kiezen:

1 2 1 2 1 2 1 2 of 2 1 2 1 2 1 2 1,

als vierde rij

4 3 4 3 4 3 4 3 of 3 4 3 4 3 4 3 4,

enz. We hebben 6 keer de keus uit 2 mogelijkheden. Ook dit levert dus 2^6 mogelijkheden. Weer kunnen we de kleuren uit het vierkant links boven daarbij nog permuteren. Zodat in totaal $4! \cdot 2^6$ mogelijkheden zich voordoen.

Dit zijn niet allemaal nieuwe mogelijkheden. Kiezen we namelijk elke keer de linker voortzetting, dan ontstaat dezelfde kleuring, die op de eerstgenoemde manier ook al verkregen was. Er zijn dus 4! mogelijkheden dubbel geteld.

Zodat het totaal aantal wordt

$$4!(2^6 + 2^6 - 1).$$

We moeten nu echter nog telkens 4 mogelijkheden identificeren, omdat deze door draaiing van het bord uit elkaar ontstaan kunnen. Dat we daarbij geen mogelijkheden identificeren, die al identiek waren, zien we daaruit, dat het niet mogelijk is, dat twee hoekpunten van het bord dezelfde kleur krijgen. We moeten de verkregen uitkomst dus nog door 4 delen en krijgen ten slotte

$$\tfrac{1}{4} \cdot 4!(2^6 + 2^6 - 1) = 762.$$

124. $1965 = 5 \,.\, 393$ en $5^2 = 4^2 + 3^2$. Door middel hiervan vinden we:

$$1965^{1964} = (4 \,.\, 393 \,.\, 1965^{981})^2 + (3 \,.\, 393 \,.\, 1965^{981})^2.$$

Rectificatie. In de bespreking van Pedoe, *Linear Algebra* op bladzijde 126 van het vorige nummer is een hinderlijke onjuistheid geslopen. De matrix C moet zijn $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Prof. dr. G. R. Veldkamp **HET EXAMEN WISKUNDE M.O.-A**

Dit werk is bestemd voor hen die zich voorbereiden op het examen Wiskunde M.O.-A Ing. f 6.90

Prof. dr. A. Heyting **PROJECTIEVE MEETKUNDE**

Dit werk is onder andere bestemd voor hen die zich voorbereiden voor de akte Wiskunde M.O.-A Ing. f 12.—; geb. f 13.90

Prof. dr. F. Loonstra **INLEIDING TOT DE ALGEBRA**

Deze uitgave is bestemd voor gebruik bij de studie Wiskunde M.O.-A
2e druk - ing. f 19.50; geb. f 22.50

W. J. H. Salet e.a. **VRAAGSTUKKEN OVER ANALYSE EN ALGEBRA**

Deel I - voor M.O.-A 7e druk - ing. f 7.25
Deel II - voor M.O.-B 3e druk - ing. f 7.75

Prof. dr. L. Kuipers **LEERBOEK DER ANALYSTE**

Deel I - voor M.O.-A 2e druk - ing. f 16.50; geb. f 18.50
Deel II - voor M.O.-B Ing. f 20.50; geb. f 22.50

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Zojuist verscheen een nieuw werkschrift Stereo voor het VHMO



STEREOVISIE

75 stereo-opgaven in beeld
door Ir. H. M. Mulder e.i.

Hulpfiguren zijn op schaal getekend; in deze figuren kan het rekenproces worden vastgelegd; de rechter bladzijden bieden verder nog ruimte voor het noteren van de voornaamste punten van het bewijs of de berekening.
Achterin het werkschrift vindt men symbolen, kwadratentafel, opmerkingen en de uitkomsten. Ing. f 2,50

Christelijk Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs (16 januari 1965): 'Daar de figuur kant en klaar is, vormt zich in korte tijd een goed idee van het probleem. Vele leerlingen zullen met meer animo een vraagstuk aanpakken als ze dit werkschrift gebruiken. Het is een handig model van 26½ bij 13½ cm., keurig uitgevoerd. Een goed oefenboek voor het eindexamen.'

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Wiskunde-uitgaven voor het V.H.M.O.

D. K. F. Heyt — **Nieuwe schoolalgebra van Wijdenes en Beth**
Deel I - 23e druk, ing. f 4.25, geb. f 4.90 - Deel II - 21e druk, geb. f 4.30 - Deel III - 21e druk, ing. f 3.80, geb. f 4.50 - Deel IV - met de volledige analyse - 14e druk, ing. f 5.90, geb. f 6.90 - Antwoorden bij deze vier delen

P. Wijdenes en W. Nieuwenhuyse — **Nieuwe schoolalgebra IVa**
voor Gymnasium - 2e druk, ing. f 3.60, geb. f 4.30 - Antwoorden

Grafiekenschrift - zichtbare afmetingen: $2\frac{1}{2}$ mm. - 15e druk, f 0.95

P. Wijdenes en Dr. P. G. van de Vliet — **Algebra en financiële rekenkunde**
voor H.B.S.-A - 10e druk, ing. f 3.90. - Antwoorden

Noordhoff's Tafel in vier decimalen - 25e druk, geb. f 1.90
Noordhoff's Schooltafel in vijf decimalen - 20e druk, geb. f 2.90
beide uitgaven met een radialentafel

P. Wijdenes en Dr. P. G. van de Vliet — **Tafel G** voor H.B.S.-A - 8e druk, geb. f 2.90
Tafel E met afzonderlijk hulpboekje - 9e druk, ing. f 4.90, geb. f 6.50

P. Wijdenes — **Nieuwe schoolmeetkunde**
Deel I - Deel II - 3e drukken, per deel ing. f 3.50, geb. f 4.— - Antwoorden bij deze delen

D. K. F. Heyt — **Goniometrie**
14e omgewerkte druk van Wijdenes' Beknopte Driehoeksmeting A en B. Deel A, voor de onderbouw - ing. f 2,—, geb. f 2.75 - Deel B, voor de bovenbouw - ing. f 3.25, geb. f 4,— - Grafiekenbladen voor de Goniometrie - te gebruiken bij deel B - ing. f 3.—, geb. f 4.—

A. A. Lucieer — **Stereometrie**
13e druk van het schoolboek van Molenbroek en Wijdenes - ing. f 5.—, geb. f 5.75 - Antwoorden

P. Wijdenes — **Werkschrift bij Stereometrie**
146 werkstukken - f 1.90

P. Wijdenes — **De kegelsneden**
met 2 prikmallen; bevat 3 parabolen, 4 ellipsen en 3 hyperbolen - 2e druk - f 1.75

P. Wijdenes — **Beknopte analytische meetkunde**
ing. f 4.75 - Antwoorden

Prikmallen - bevat 4 ellipsen, 3 parabolen, 3 hyperbolen; met assen, brandpunten en asymptoten - minimaal 10 stel - per stel f 0.35

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Alle in dit blad geadverteerde uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever